der Chase, jetzt formal ...

Datenbank-Instanzen

1. Wir fixieren drei unendliche, paarweise disjunkte Mengen Δ, Δ_{null} und V.
   - Δ ist der zugrunde gelegte Domain.
   - $\Delta_{null} = \{n_1, n_2, \ldots\}$ ist die Menge der Null-Werte. Wir sprechen in diesem Zusammenhang von "labelled nulls".
   - V bezeichne die Menge der Variablen.
2. Eine Datenbank-Fakt ist ein $\mathcal{R}$-Atom mit Argumenten aus $\Delta \cup \Delta_{null}$.
3. Eine Datenbankinstanz $\mathcal{I}$ ist eine (nicht notwendigerweise endliche) Menge von Datenbanken-Fakten.

Beispiel

$$\mathcal{I} = \{fly(Fft, B, 600), fly(Fft, C, n_1), fly(n_2, C, n_1), \ldots\}$$

n_1, n_2 sind Null-Werte (labelled nulls).

Konjunktive Anfragen als Datenbank-Instanz

Den Rumpf $body(\overline{x}, \overline{y})$ einer konjunktiven Anfrage

$$Q : ans(\overline{x}) \leftarrow body(\overline{x}, \overline{y})$$

fassen wir als eine Datenbank-Instanz $db(Q)$ auf, wobei wir die Variablen durch Null-Werte ersetzen (durch eine injektive Abbildung).

Das Ergebnis des Chase auf der Instanz $db(Q)$ bezeichnen wir weiterhin als Q^{Σ}.

Beispiel

$$\text{ans}(X,D) \leftarrow \text{fly}(Bonn,X,D), \text{fly}(X,Bonn,D), \text{hasAirport}(X), \text{hasAirport}(Bonn)$$

$db(Q)$:

ans	
n_1	n_2

fly		
Bonn	n_1	n_2
n_1	*Bonn*	n_2

hasAirport
n_1
Bonn

Umgekehrt kann eine Datenbank-Instanz in eine konjunktive Anfrage umgewandelt werden:

Beispiel

ans
n_1

fly		
n_1	n_2	n_3
n_2	*Bonn*	n_4

hasAirport
n_1
n_2
Bonn

$$\text{ans}(X) \leftarrow \text{fly}(X, Y, D_1),\ \text{fly}(Y, \mathit{Bonn}, D_2),\ \text{hasAirport}(X),\ \text{hasAirport}(Y),\ \text{hasAirport}(\mathit{Bonn})$$

Der Chase-Algorithmus kann auf beliebigen endlichen (!) Datenbank-Instanzen angewendet werden, insbesondere auf $db(Q)$, wobei Q eine konjunktive Anfrage.

Anwendbarkeit eines Chase-Schritts

- Sei $\alpha \in \Sigma$ und $\mathcal{I}$ eine endliche Datenbank-Instanz.
- Bezeichne $\widetilde{\alpha}$ den Constraint der aus α hervorgeht indem man den $\forall$-Quantor und die vorangestellte Liste der allquantifizierten Variablen streicht.
- Sei $\overline{a} \in (\Delta \cup \Delta_{null})^*$.
- Das Tupel $(\alpha, \overline{a})$ heißt anwendbar auf $\mathcal{I}$, falls $\mathcal{I} \not\models \widetilde{\alpha}(\overline{a})$.
- Der Constraint α heißt anwendbar auf $\mathcal{I}$ falls es ein $\overline{b} \in (\Delta \cup \Delta_{null})^*$ gibt, so dass $(\alpha, \overline{b})$ anwendbar auf $\mathcal{I}$ ist.

Definition: Homomorphismen

Seien $\mathcal{I}, \mathcal{I}'$ Datenbanken-Instanzen. Ein Homomorphismus von $\mathcal{I}$ nach $\mathcal{I}'$ ist eine Abbildung $h : \Delta \cup \Delta_{null} \cup V \rightarrow \Delta \cup \Delta_{null}$ mit

- für alle $c \in \Delta$ gilt $h(c) = c$ und
- für alle $R(t_1, ..., t_n) \in I$ gilt $h(R(t_1, ..., t_n)) := R(h(t_1), ..., h(t_n)) \in I'$.

Ein Homomorphismus wird in natürlicher Weise fortgesetzt auf $(\Delta \cup \Delta_{null} \cup V)^*$.

Unterschied zu Enthaltensein-Abbildungen?

Chase-Schritt: TGD

- Sei $(\alpha, \overline{a})$ anwendbar auf $\mathcal{I}$, wobei α eine TGD ist. Die Liste der allquantifizierten Variablen in α sei $\overline{x}$.
- Der Chase-Schritt $\mathcal{I} \xrightarrow{\alpha, \overline{a}} \mathcal{J}$ ist definiert wie folgt.
  - Sei h ein Homomorphismus mit $h(\overline{x}) = \overline{a}$.
  - Für jede existentiell quantifizierte Variable y in α wähle einen "neuen" Null-Wert $n_y \in \Delta_{null}$ und definiere $h(y) := n_y$.
  - Setze $\mathcal{J} := \mathcal{I} \cup h(head(\alpha))$.

Was gilt nun in $\mathcal{J}$?

Beispiel

$\mathcal{I} = \{R(a, b)\}$
$\Sigma := \{\forall x_1, x_2\ (\mathsf{R}(x_1, x_2) \rightarrow \exists y\ \mathsf{S}(x_2, y))\ \}$

Chase-Schritt: EGD

- Sei $(\alpha, \overline{a})$ anwendbar auf $\mathcal{I}$, wobei α eine EGD ist.
- Seien x_1, x_2 die beiden Variablen, welche in $head(\alpha)$ vorkommen.
- Sei h ein Homomorphismus mit $h(\overline{x}) = \overline{a}$.
- Wenn $h(x_1), h(x_2) \in \Delta$, dann ist der Chase-Schritt undefiniert, d.h. der Chase schlägt fehl.
- Ansonsten ist der Chase-Schritt $\mathcal{I} \xrightarrow{\alpha, \overline{a}} \mathcal{J}$ definiert wie folgt.
  - Definiere einen neuen Homomorphismus h', der sich von h höchstens an den Stellen x_1, x_2 unterscheidet. Falls $h(x_1) \in \Delta$ dann $h'(x_1) := h'(x_2) := h(x_1)$. Falls $h(x_1) \notin \Delta$ dann $h'(x_2) := h'(x_1) := h(x_2)$.
  - Setze $\mathcal{J} := h'(\mathcal{I})$.

Was gilt nun in $\mathcal{J}$?

Beispiel

$\mathcal{I} = \{R(n_1, n_2), R(n_1, n_3)\}$
$\Sigma := \{\forall x_1, x_2, x_3\ (\mathrm{R}(x_1, x_2) \wedge \mathrm{R}(x_1, x_3) \rightarrow x_2 = x_3)\}$

Das Ergebnis eines Chase-Schritts hängt davon ab ob n_1, n_2, n_3 Null-Werte sind, oder nicht.

Chase-Sequenzen

Eine Chase-Sequenz ist eine (nicht-notwendigerweise endliche) Folge von Chase-Schritten $\mathcal{I}_0 \xrightarrow{\alpha_0, \bar{a}_0} \mathcal{I}_1 \xrightarrow{\alpha_1, \bar{a}_1} \mathcal{I}_2 \ldots$, wobei wir keinerlei Annahme darüber treffen in welcher Reihenfolge Constraints angewendet werden.
Falls eine solche Sequenz endlich ist und kein weiterer Chase-Schritt mehr anwendbar ist, dann sagen wir dass die Sequenz terminiert.

Achtung: unterschiedliche Reihenfolgen der Constraint-Anwendung führen zu unterschiedlichen Chase-Resultaten.

Satz

Sei $\mathcal{J}$ die letzte Datenbank-Instanz in einer terminierenden Chase-Sequenz ausgehend von der Instanz $\mathcal{I}$.

- Es gilt $\mathcal{J} \models \Sigma$.
- Es gilt $\mathcal{J} \models \mathcal{I}$.

Sei n ein Null-Wert.

Beispiel

$\mathcal{I} = \{R(a, b), R(a, n)\}$
$\Sigma := \{ \quad \forall x_1, x_2 \ (\mathrm{R}(x_1, x_2) \rightarrow \exists y \ \mathrm{S}(x_2, y)),$
$\qquad \forall x_1, x_2, x_3 \ (\mathrm{R}(x_1, x_2) \wedge \mathrm{R}(x_1, x_3) \rightarrow x_2 = x_3)\}$

Welche Chase-Sequenzen sind möglich?

Welche Eigenschaften haben verschiedene Chase-Ergebnisse gemeinsam?

Universelle Eigenschaft

Satz

Sei $\mathcal{J}$ die letzte Datenbank-Instanz in einer terminierenden Chase-Sequenz ausgehend von der Instanz $\mathcal{I}$.
Falls $\mathcal{K}$ eine Datenbankinstanz ist mit $\mathcal{K} \models \mathcal{I} \cup \Sigma$ dann gibt es einen Homomorphismus h von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{K}$.

Deshalb bezeichnen wir $\mathcal{J}$ als universelle Lösung.

Folgerung

Für je zwei Chase-Ergenisse $\mathcal{J}, \mathcal{J}'$ gibt es einen Homomorphismus von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{J}'$ und einen Homomorphismus von $\mathcal{J}'$ nach $\mathcal{J}$.

Dieser Punkt erlaubt es uns von **dem** Chase-Ergebnis $\mathcal{I}^\Sigma$ zu sprechen, d.h. ein Chase-Ergebnis ist eindeutig bis auf Homomorphie, was für alle bisher bekannten Anwendungen ausreicht. Mit anderen Worten: jede Anwendungsaufgabe kann mit jedem beliebigen Chase-Resultat gelöst werden.

Eine andere Formulierung ...

Satz

Seien Q und Q' konjunktive Anfragen und existiere Q^Σ. Dann gilt:

- $Q \sqsubseteq_\Sigma Q'$ genau dann wenn $Q^\Sigma \sqsubseteq Q'$.
- $Q \sqsubseteq_\Sigma Q'$ genau dann wenn $Q^\Sigma \sqsubseteq Q'^\Sigma$.

Beweis der zweiten Aussage mit folgendem Lemma (Anfragen werden als Datenbank-Instanz betrachtet).

Lemma

Sei $\mathcal{I} \models \Sigma$ und h ein Homomorphismus von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{I}$. Falls $\mathcal{I}^\Sigma$ endlich ist, dann kann h zu einem Homomorphismus von $\mathcal{J}^\Sigma$ nach $\mathcal{I}$ erweitert werden.

Beweis des Lemmas:

Induktion über die Anzahl der Chase-Schritte:

- Falls keine Chase-Schritte gemacht werden ist die Behauptung klar.
- Wir skizzieren den Fall eines Chase-Schritts $\mathcal{J}_i \xrightarrow{\alpha,\bar{a}} \mathcal{J}_{i+1}$ für den Fall, dass eine TGD angewendet wird.
  Gemäß Induktionsvoraussetzung gibt es einen Homomorphismus h_i von $\mathcal{J}_i$ nach $\mathcal{I}$ mit $h_i \supseteq h$. Sei $\alpha = \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \rightarrow \exists \bar{y}\psi(\bar{x}, \bar{y}))$. Seien $\bar{n}$ die Null-Werte, welche in diesem Schritt neu eingeführt werden, d.h. $\mathcal{J}_{i+1} \models \psi(\bar{a}, \bar{n})$.
  Es gilt $\mathcal{J}_i \models \varphi(\bar{a})$, also $\mathcal{I}^{\Sigma} \models \varphi(h(\bar{a}))$. Wir wissen, dass $\mathcal{I} \models \Sigma$ gilt, demnach gibt es $\bar{b}$, so dass $\mathcal{I} \models \psi(h(\bar{a}), \bar{b})$. Wir setzen h_{i+1} gleich h_i auf allen Werten aus $\mathcal{J}_i$ und setzen außerdem $h_{i+1}(\bar{n}) := \bar{b}$. Man rechnet nach, dass h_{i+1} ein Homomorphismus von $\mathcal{J}_{i+1}$ nach $\mathcal{I}$ ist.
- Für den Fall eines Chase-Schritts mit Hilfe einer EGD, setzen wir $h_{i+1} = h_i$.

Unentscheidbarkeit der Chase-Terminierung

Satz

Sei Σ eine Menge von Tuple-generating und Equality-generating Dependencies. Es ist im Allgemeinen unentscheidbar ob der Chase mit Σ auf einer fixen Instanz $\mathcal{I}$ terminiert.

$\Longrightarrow$ Problematisch in der Praxis

Hinreichende Terminierungsbedingung für den Chase

Lösungsansatz

Hinreichende, statisch überprüfbare Bedingungen über der Constraintmenge, die Chase-Terminierung auf allen Instanzen garantieren.

Hinreichende Terminierungsbedingungen für den Chase

Es wurden verschiedene solcher Bedingungen entwickelt, z.B.

- Acyclicity (wird in der Vorlesung behandelt)
- Weak Acyclicity (wird auf Übungsblatt 3 behandelt)
- Stratification
- ...

$\Longrightarrow$ Diese Bedingungen erlauben es, den Chase-Algorithmus in vielen praxisrelevanten Szenarien anzuwenden

Acyclicity

Definition

Sei Σ eine Menge von Tuple-generating und Equality-generating Dependencies. Konstruiere den *Relationsgraphen* $rel(\Sigma) = (V, E)$ wie folgt. Für jede Tuple-generating Dependency $\varphi_{tgd} \in \Sigma$

$$\varphi_{tgd} := \forall\, \overline{x}(R_1(\overline{x}) \wedge \cdots \wedge R_m(\overline{x}) \rightarrow \exists\, \overline{y} S_1(\overline{x}, \overline{y}) \wedge \cdots \wedge S_n(\overline{x}, \overline{y}))$$

- erweitere V um die Menge aller Relationsbezeichner in φ_{tgd}, d.h. setze $V := V \cup \{R_1, \ldots, R_n, S_1, \ldots, S_m\}$ und
- erweitere E um alle Kanten $R_i \rightarrow S_j$ für alle $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, d.h. setze $E := E \cup \{(R_i, S_j) \mid\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$.

Anmerkung: Equality-generating Dependencies spielen bei der Konstruktion des Relationsgraphen keine Rolle.

Acyclicity

Definition

Sei Σ eine Menge von Tuple-generating und Equality-generating Dependencies. Σ heißt *azyklisch* genau dann wenn der Relationsgraph $rel(\Sigma)$ keinen Zyklus enthält.

Satz

Sei Σ eine azyklische Menge von Tupel-generating und Equality-generating Dependencies. Dann terminiert der Chase-Algorithmus mit Σ für jede Datenbankinstanz.

Intuition: Wenn der Relationsgraph keine Zyklen besitzt können Constraints nie zyklisch feuern.

Beispiel Acyclicity

Beispiel

Betrachte die Constraintmenge $\Sigma_1 := \{\alpha_1\}$ mit

$$\alpha_1 := \forall x_1, x_2, y \ \text{fly}(x_1,x_2,y) \rightarrow \text{hasAirport}(x_1) \wedge \text{hasAirport}(x_2).$$

Der Relationsgraph $rel(\Sigma_1) = (V_1, E_1)$ ist definiert als

$V_1 := \{$ fly, hasAirport $\}$,
$E_1 := \{$ (fly,hasAirport) $\}$.

Offensichtlich enthält $rel(\Sigma_1)$ keinen Zyklus. Gemäß vorigem Satz terminiert der Chase mit Σ_1 für jede Datenbankinstanz.

Beispiel Acyclicity

Beispiel

Betrachte die Constraintmenge $\Sigma_2 := \{\alpha_2\}$ mit

$\alpha_2 := \forall x_1, x_2, y \text{ rail}(x_1,x_2,y) \rightarrow \text{rail}(x_2,x_1,y)$.

Der Relationsgraph $rel(\Sigma_2) = (V_2, E_2)$ ist definiert als

$V_2 := \{ \text{ rail } \}$,
$E_2 := \{ (\text{rail},\text{rail}) \}$.

- $rel(\Sigma_2)$ enthält einen Zyklus $\Longrightarrow$ keine Terminierungsgarantien ableitbar.
- Man kann sich leicht klarmachen, dass der Chase mit Σ_2 dennoch immer terminiert. Dies zeigt, dass Acyclicity nur eine hinreichende Bedingung ist.

Komplexere hinreichende Bedingungen notwendig um hier Chase Terminierung abzuleiten, siehe z.B. *Weak Acyclicity* auf Übungsblatt 3.

Anfrageminimierung mittels Chase

Satz

Sei Σ eine Menge von Tuple-generating und Equality-generating Dependencies und Q eine Konjunktive Anfrage. Wenn Q^Σ existiert, dann

- ist jede minimale Anfrage $Q' \equiv_\Sigma Q$ eine Teilanfrage von Q^Σ.
- gilt für jede Teilanfrage $Q' \subseteq Q^\Sigma$: $Q' \equiv_\Sigma Q^\Sigma \Leftrightarrow Q'^\Sigma \sqsubseteq Q^\Sigma$.

Beweis der zweiten Behauptung

Umformen der rechten Seite gemäß dem Satz auf Folie 43 ergibt die Äquivalenz $Q' \equiv_\Sigma Q^\Sigma \Leftrightarrow Q' \sqsubseteq_\Sigma Q^\Sigma$.
Diese Äquivalenz gilt per Definition von $\equiv_\Sigma$ genau dann wenn $Q^\Sigma \sqsubseteq_\Sigma Q'$ gilt. Aus der Annahme $Q' \subseteq Q^\Sigma$ folgt aber direkt $Q^\Sigma \sqsubseteq Q'$, was $Q^\Sigma \sqsubseteq_\Sigma Q'$ impliziert.

Anfrageminimierung mittels Chase

Algorithmus zur Berechnung minimaler Σ-äquivalenter Anfragen

Eingabe: Q, Σ

1. Berechne Q^Σ (falls existent).
2. Betrachte alle Teilanfragen $Q' \subseteq Q^\Sigma$ bottom-up, d.h. erst Anfragen mit einem Atom, dann Anfragen mit zwei Atomen ...
3. Überprüfe jeweils, ob $Q'^\Sigma \sqsubseteq Q^\Sigma$. Falls ja, so ist $Q'(\equiv_\Sigma Q^\Sigma \equiv_\Sigma Q)$ eine minimale äquivalente Anfrage zu Q unter Σ.
4. Betrachte ggf. noch ausstehende Teilanfragen gleicher Größe, um weitere minimale Σ-äquivalente Anfragen zu finden.

Beachte: Es können mehrere minimiale Anfragen existieren, i.A. sogar exponentiell viele.

Anfrageminimierung mittels Chase

Beispiel

Betrachten Sie die Constraintmenge $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ mit

α_1: $\forall\, x_1, x_2, d\ (\text{fly}(x_1,x_2,d) \rightarrow \text{hasAirport}(x_1) \wedge \text{hasAirport}(x_2))$
α_2: $\forall\, x_1, x_2, d\ (\text{fly}(x_1,x_2,d) \rightarrow \text{fly}(x_2,x_1,d))$

und die Anfrage Q : $\text{ans}(X) \leftarrow \text{fly}(\mathit{Bonn},X,Y), \text{hasAirport}(X)$.

Nach Chase mit α_1 und α_2 erhalten wir Q^Σ:

$\text{ans}(X) \leftarrow \text{fly}(\mathit{Bonn},X,D), \text{fly}(X,\mathit{Bonn},D), \text{hasAirport}(X), \text{hasAirport}(\mathit{Bonn})$

Wir betrachten nun die Teilanfragen von Q^Σ bottom-up und stellen fest, dass für

Q' : $\text{ans}(X) \leftarrow \text{fly}(\mathit{Bonn},X,\text{D})$
Q'': $\text{ans}(X) \leftarrow \text{fly}(X,\mathit{Bonn},\text{D})$

die Beziehungen $Q'^\Sigma \sqsubseteq Q^\Sigma$ und $Q''^\Sigma \sqsubseteq Q^\Sigma$ gelten. Folglich sind Q' und Q'' minimale Σ-äquivalente Anfragen zu Q.